

Les equacions de Friedmann: mecànica newtoniana *versus* relativitat general

JAUME DE HARO

Com pot ser que les matemàtiques, essent al cap i a la fi un producte del pensament humà independent de l'experiència, siguin tan admirablement adequades als objectes de la realitat? És que la raó humana, aleshores, sense experiència, només amb el pensament, pot comprendre les propietats de les coses reals? En la meua opinió: la resposta a aquesta pregunta és, breument, aquesta: en la mesura que les proposicions de les matemàtiques es refereixen a la realitat, no són certes; i en la mesura que són certes, no es refereixen a la realitat.

Albert Einstein (1879–1955)

Resum: En aquest assaig, presentem una derivació heurística de les equacions de Friedmann pertorbades basada en la mecànica newtoniana, oferint una perspectiva intuïtiva sobre aquestes relacions cosmològiques. Aquest enfocament ressalta l'acord notable entre les descripcions newtonianes i relativistes dins de certs límits, actuant tant com un nexa conceptual i fins i tot filosòfic i com una eina pedagògica per aprofundir en els principis físics que governen l'evolució de l'univers.

Simplificant el complex marc matemàtic de la teoria de la relativitat general, aquest mètode proporciona una via accessible per explorar la dinàmica de l'univers. Subratlla com la mecànica clàssica, quan s'aplica amb cura, pot oferir perspectives que s'alineen amb els resultats relativistes en l'aproximació lineal. Aquesta connexió no només aprofundeix la nostra comprensió de la universalitat de les lleis físiques, sinó que també reforça la idea que els fenòmens relativistes sovint es poden entendre a través d'anàlegs clàssics familiars.

Paraules clau: equacions de Friedmann, perturbacions cosmològiques, mecànica newtoniana, relativitat general.

Classificació MSC2020: 83C05, 83C99, 70F99, 83F05.

1 Introducció

En el present estudi, ens centrem en les equacions de Friedmann, formulades per primera vegada per Aleksandr Friedmann a principis de la dècada dels anys vint del segle passat. Aquestes equacions, sota certes hipòtesis, representen la forma que adopten les equacions de camp d'Einstein en el marc de la relativitat general (RG) quan s'apliquen a la cosmologia. Constitueixen la pedra angular de la cosmologia moderna, ja que descriuen la dinàmica a gran escala de l'univers sota les hipòtesis d'homogeneïtat i isotropia, tenint en compte la curvatura i el contingut d'energia i matèria de l'univers. Proporcionen un marc matemàtic per explorar com l'univers evoluciona al llarg del temps, abastant tant escenaris d'expansió com de contracció.

L'innovador treball de Friedmann [10, 11] inicialment va tenir dificultats per obtenir reconeixement. Durant anys, les solucions de les seves equacions, que revelaven la possibilitat d'universos en expansió i contracció, van ser en gran part ignorades per la comunitat científica [20]. Fins i tot Einstein, malgrat el seu paper fonamental en el desenvolupament de la RG, va desestimar inicialment els resultats de Friedmann, considerant-los inconsistents amb les seves pròpies equacions. Ben aviat, però, a instàncies del mateix Friedmann, Einstein va reconèixer-ne la validesa després d'un examen més detallat, tot i que durant deu anys va seguir sent escèptic sobre la idea d'un univers en expansió. No va ser fins a la formulació de la llei de Hubble-Lemaître, que va establir una relació directa entre el desplaçament cap al vermell de la llum de les galàxies i les seves distàncies, que el treball de Friedmann va ser plenament apreciat. Aquest avenç va connectar la cosmologia observacional amb la física teòrica, i va consolidar la rellevància de les solucions de les equacions de Friedmann per entendre l'evolució de l'univers.

Partint de les contribucions pioneres de Friedmann, l'estudi que presentem deriva les equacions de Friedmann pertorbades a través d'un enfocament alternatiu. Inspirant-nos en treballs anteriors, com els de McCrea i Milne [25] i posteriorment els de Callan, Dicke i Peebles [4], utilitzarem un mètode heurístic basat en la mecànica newtoniana. Aquesta perspectiva alternativa no només serveix com a eina pedagògica per comprendre les equacions de Friedmann, sinó que també subratlla la coherència entre els marcs newtonians i relativistes sota condicions específiques. A través d'aquest enfocament, es pretén il·luminar els principis físics subjacents a l'evolució còsmica i oferir perspectives que complementin la visió relativista.

Les implicacions d'aquest treball van més enllà de l'aspecte pedagògic. La derivació posa de manifest el paper de les inhomogeneïtats del factor d'escala i la taxa d'expansió de Hubble (la mesura de la velocitat en què s'expandeix l'univers), un fet amb profundes conseqüències observacionals. En particular, suggereix que les variacions locals en la taxa d'expansió de Hubble podrien sorgir a causa de diferències en els entorns físics dels objectes còsmics utilitzats per mesurar-la. Aquesta perspectiva podria oferir una nova visió sobre la *tensió de Hubble*, la persistent discrepància entre el valor actual de la taxa d'expansió de Hubble mesurada localment i el seu valor inferit del fons de microones còsmic, i proporcionaria així un marc per interpretar aquestes variacions.

A més a més, aquest enfocament posa èmfasi en la importància de l'anàlisi pertorbativa per connectar la teoria amb l'observació. Obre la porta a una exploració més profunda de com les estructures i dinàmiques locals influeixen en els paràmetres cosmològics a gran escala, connectant la física a petita escala amb el relat més ampli de l'evolució còsmica. Aquest enfocament dual —que ofereix tant una introducció pedagògica com perspectives sobre problemes avançats— subratlla la versatilitat del treball que presentem.

El treball està estructurat de la manera següent: A la secció 2, i partint de la consideració que l'univers presenta homogeneïtat i isotropia a gran escala, asumirem que està ple d'un fluid perfecte homogeni, els elements del qual es poden identificar amb les galàxies que el componen. En aquest context, derivarem les equacions de Friedmann en la seva forma homogènia, les solucions de les quals descriuen tant l'evolució d'aquest flux com l'expansió de l'univers, basant-nos en el marc teòric de la relativitat general. A la secció 3 s'exposa com aquestes equacions es poden derivar novament fent ús exclusivament de conceptes propis de la mecànica newtoniana. La secció 4, que constitueix l'apartat més rellevant d'aquest estudi, està dedicada a la determinació, de manera heurística, de les equacions de Friedmann pertorbades en primera aproximació. Som conscients que l'univers no és completament homogeni a gran escala, i aquestes inhomogeneïtats ens proporcionen informació essencial sobre la seva estructura. Per aquest motiu, és fonamental determinar les equacions pertorbades, ja que permeten descriure i entendre l'evolució d'aquestes inhomogeneïtats. A la secció 5, deduirem les equacions de conservació i d'Euler relativistes, les quals, juntament amb les equacions pertorbades de Friedmann, constitueixen el sistema que descriu de manera completa l'evolució de les inhomogeneïtats. A la secció 6 establim la relació entre la mètrica de Schwarzschild —una de les primeres solucions de les equacions d'Einstein— i la mecànica newtoniana. També analitzarem la seva connexió amb els forats negres i discutirem com, a partir d'aquesta mètrica, es pot reproduir correctament la precessió del periheli de Mercuri. Finalment, a la secció 7, debatrem el significat físic de les singularitats matemàtiques que, sovint, apareixen en cosmologia.

2 Les equacions de Friedmann a partir de la relativitat general

En aquesta secció obtindrem les equacions homogènies de Friedmann a partir de la relativitat general. Per poder fer-ho, primer de tot hem d'assumir l'homogeneïtat i la isotropia de l'univers a gran escala, cosa que ens porta a descriure'l geomètricament com una varietat de Lorentz (una varietat pseudo-riemanniana amb signatura $(1, 3)$, que és la generalització amb curvatura de l'espai-temps de Minkowski que apareix en la relativitat especial) amb la mètrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right),$$

on $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, $N(t)$ denota la funció lapse, que representa la llibertat de reparametritzar el temps, k representa la curvatura de l'espai, i $a(t)$ indica el factor d'escala: per entendre'ns, una mena de «radi de l'univers», almenys en el cas que l'espai tingui curvatura positiva.

Per a aquesta mètrica, l'invariant geomètric més important és l'escalar de Ricci o curvatura escalar, que s'expressa com a

$$R = 6 \left(\frac{1}{aN} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{N} \right) + \frac{H^2}{N} + \frac{k}{a^2} \right),$$

on, en aquesta secció, el «punt» indica la derivada respecte al *temps còsmic* t , i $H = \frac{\dot{a}}{a}$ representa la taxa d'expansió de Hubble, també anomenada *paràmetre de Hubble*, ja que depèn del temps còsmic. Per tant, no sembla gaire apropiat anomenar-la *constant de Hubble*, com es fa habitualment.

Quan considerem un univers homogeni i isòtrop a gran escala, ple d'un fluid perfecte en què la pressió depèn únicament de la densitat d'energia, el model de FLRW ens permet descriure diferents etapes evolutives. Inicialment, el fluid estaria compost per radiació (dominant en la seva etapa primitiva), seguit d'una distribució homogènia dominada per matèria bariònica i, sobretot, matèria fosca. En l'època actual, el component predominant seria el que s'anomena *energia fosca*, en què la pressió és aproximadament igual a la densitat d'energia canviada de signe.

En aquest context, el lagrangiana d'Einstein-Hilbert ([18]) es pot expressar com una funció de l'escalar de Ricci, la mesura espai-temps i el contingut material, i pren la forma següent:

$$L_{EH} = \frac{1}{2} R \sqrt{-g} - 8\pi G \rho_0 \sqrt{-g} = \frac{1}{2} R a^3 N - 8\pi G \rho_0 a^3 N,$$

on ρ_0 representa la densitat d'energia homogènia, G és la constant de la gravitació universal, i $\sqrt{-g} = Na^3$ actua com a mesura quadridimensional per a la mètrica de FLRW.

Cal destacar que aquest lagrangiana es pot reformular com a

$$L_{EH} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}a^2}{N} \right) - \frac{3\dot{a}^2 a}{N} + 3kaN - 8\pi G \rho_0 a^3 N.$$

Per tant, tenint en compte que el primer terme és una derivada total, aquest lagrangiana és equivalent al següent:

$$\bar{L}_{EH} = -\frac{3\dot{a}^2 a}{N} + 3kaN - 8\pi G \rho_0 a^3 N.$$

Noti's que la variació respecte de la funció lapse condueix a la coneguda *restricció hamiltoniana*

$$0 = \frac{\partial \bar{L}_{EH}}{\partial N} = \frac{3\dot{a}^2 a}{N^2} + 3ka - 8\pi G \rho_0 a^3,$$

on, després d'escollir $N(t) = 1$ (recordem que la funció lapse només representa la llibertat de reparametritzar el temps. En triar-la igual a 1, el que estem fent és seleccionar el temps propi d'un observador que es troba en repòs respecte al fluid que omple l'univers), s'arriba a la primera equació de Friedmann:

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0, \quad (1)$$

que no és altra cosa que una restricció, ja que només conté la derivada primera del factor d'escala.

Per derivar l'equació dinàmica, realitzem una variació respecte del factor d'escala. Després de fixar $N = 1$, l'equació d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}_{EH}}{\partial \dot{a}} \right) = \frac{\partial \tilde{L}_{EH}}{\partial a}$$

ens porta a

$$6\ddot{a}a + 3\dot{a}^2 = 8\pi G \frac{d}{da}(\rho_0 a^3) - 3ka,$$

on, degut a la dependència de la densitat d'energia únicament respecte del factor d'escala, substituïm $\frac{\partial}{\partial a}$ per $\frac{d}{da}$.

A continuació, assumim una evolució adiabàtica en què l'entropia total es conserva, i utilitzem la primera llei de la termodinàmica $dE = -p dV$ (la variació de l'energia és igual a menys la pressió per la variació del volum). En el nostre cas, $E = a^3 \rho_0$, $V = a^3$ i $p = p_0$, essent p_0 la pressió homogènia, obtenim

$$d(\rho_0 a^3) = -p_0 da^3 \Rightarrow \frac{d}{da}(\rho_0 a^3) = -3p_0 a^2,$$

i, per tant:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G p_0 - \frac{1}{2} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right).$$

Finalment, a partir de la primera equació de Friedmann (1), arribem a l'equació de l'acceleració, o segona equació de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p_0 + \rho_0) = -\frac{4\pi G}{3}(1 + 3w_0)\rho_0, \quad (2)$$

on hem introduït el *paràmetre de l'equació d'estat* $w_0 \equiv \frac{p_0}{\rho_0}$.

Observem que aquesta última equació ens diu que, quan $w_0 > -1/3$, l'univers s'expandeix de manera desaccelerada, i, quan $w_0 < -1/3$, ho fa de manera accelerada.

Aquest fet és important, ja que, segons el model actual més utilitzat, l'anomenat Λ CDM-model (model Λ de matèria fosca freda, on Λ és la *constant cosmològica* d'Einstein), l'univers va experimentar inicialment, com explicarem a la secció 7, una fase d'expansió accelerada molt ràpida coneguda com a *inflació* [13]. Actualment, com sabem gràcies a les observacions de supernoves de

tipus la fetes pels grups liderats pels astrònoms guardonats amb el Premi Nobel Perlmutter, Riess i Schmidt a finals del segle passat, l'univers es troba de nou en una fase d'expansió accelerada. Per explicar aquesta segona fase, els cosmòlegs postulen que el component dominant de l'univers responsable d'aquesta acceleració s'anomena *energia fosca*. Curiosament, com ja hem comentat, el candidat més utilitzat per modelar-la és la famosa constant cosmològica, la qual dona lloc a una força repulsiva, i que Einstein ja havia introduït l'any 1917 per compensar l'atracció gravitatòria en el seu model estàtic.

Posteriorment, Einstein va haver de renunciar-hi un cop es va reconèixer que l'univers s'estava expandint, gràcies a les observacions de Hubble i altres astrònoms. Tot i així, ja abans d'aquest descobriment, cosmòlegs de prestigi, com ara Willem de Sitter, havien identificat que el model estàtic d'Einstein era dinàmicament inestable i que petites pertorbacions podrien desencadenar el col·lapse o l'expansió de l'univers. Aquesta inestabilitat inherent va ser un dels primers indicis que el model estàtic no era sostenible.

Com es diu amb certa ironia, «si s'esternuda en el model d'Einstein, l'univers col·lapsa», una expressió que, en el fons, subratlla que fins i tot una petita pertorbació seria suficient per alterar l'equilibri precari que plantejava. Avui dia, si ho analitzem des del punt de vista dels sistemes dinàmics, diríem que, qualitativament, el punt d'equilibri que representa matemàticament la solució d'Einstein és inestable; de fet, correspon a un punt de sella (vegeu, per exemple, [16]). Tanmateix, cal recordar que, en aquella època, la teoria qualitativa dels sistemes dinàmics encara no estava prou desenvolupada per proporcionar una anàlisi formal i detallada d'aquesta inestabilitat.

3 Les equacions de Friedmann a partir de la mecànica newtoniana

Ara tornarem a derivar les dues equacions de Friedmann homogènies, però des d'una perspectiva newtoniana. Considerem, en coordenades comòbils (són les coordenades adoptades per un observador que es mou amb el fluid homogeni que omple l'univers), una bola homogènia de mida gran amb un radi $\bar{R}$ en l'espai euclidià (també podem considerar $\bar{R} = \infty$, però, per a un radi finit, la massa total dins de la bola és finita: $\bar{M} = \frac{4\pi}{3} \varrho_0 \bar{R}^3$, on ϱ_0 és la densitat de massa homogènia).

Suposem que la bola s'expandeix radialment. Això vol dir que, si O és el centre de la bola, un punt P dins de la bola a l'instant t_0 es transforma en el punt P_t a l'instant t , i la distància des de O fins a P_t ve donada per $d_{OP_t} \equiv d_{OP}(t) = a(t) d_{OP} = a(t) |\vec{OP}|$, on $a(t)$, amb $a(t_0) = 1$, és el factor d'escala que ens ha aparegut a la secció anterior.

A més a més, a l'instant t_0 , considerem el triangle $\widehat{POQ}$, que es transforma en el triangle equivalent $\widehat{P_tOQ_t}$ a l'instant t . Per tant, com que $d_{OP_t} = a(t) d_{OP}$ i $d_{OQ_t} = a(t) d_{OQ}$, utilitzant el teorema de Tales, trobem que, per a qualsevol parell de punts P i Q dins de la bola, $d_{P_tQ_t} = a(t) d_{PQ}$.

La relació mostra que qualsevol bola, a l'instant t_0 , centrada en un punt P amb radi $R \ll \bar{R}$ s'expandeix radialment amb la mateixa taxa que la bola gran original. A més a més, la velocitat relativa entre P_t i Q_t segueix la llei de Hubble-Lemaître

$$\frac{d}{dt}(d_{P_t Q_t}) = \dot{a}(t) d_{PQ} = H(t) d_{P_t Q_t}.$$

L'equació de moviment per al factor d'escala en la mecànica newtoniana es deriva considerant una bola centrada en un punt donat P i amb un radi inicial R a l'instant t_0 . A l'instant t , la força radial en un punt donat Q_t , situat a la vora de la bola, es calcula com a $\mathbf{F}(Q_t) = f(a(t)R) \frac{\overrightarrow{P_t Q_t}}{a(t)R}$. Per determinar la funció f , es calcula el flux que entra a la bola

$$\Psi = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi a^2(t) R^2 f(a(t)R),$$

on $\mathbf{n}$ és la normal exterior a l'esfera que envolta la bola i dS és la mesura de l'àrea de l'esfera.

D'altra banda, a partir de l'equació clàssica de Poisson $\nabla \cdot \mathbf{F} = -4\pi G \varrho_0$, i el teorema de la divergència de Gauss, el flux també ve donat per

$$\Psi = \int \nabla \cdot \mathbf{F} dV = -\frac{16\pi^2 G}{3} \varrho_0 a^3(t) R^3,$$

la qual cosa condueix a la següent expressió de f :

$$f(a(t)R) = -\frac{4\pi G}{3} \varrho_0 a(t)R \Rightarrow \mathbf{F}(Q_t) = -\frac{4\pi G}{3} \varrho_0 \overrightarrow{P_t Q_t}.$$

Per tant, l'acceleració que experimenta una partícula de prova de massa m al punt Q a causa de la bola es determina mitjançant la segona llei de Newton com a

$$m \frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{P_t Q_t}) = -\frac{4\pi G m}{3} \varrho_0 \overrightarrow{P_t Q_t} \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \varrho_0,$$

on hem usat que $\overrightarrow{P_t Q_t} = a(t) \overrightarrow{PQ}$, i ens proporciona la segona equació de Friedmann per a un fluid de pols, és a dir, amb pressió nul·la.

Aquesta equació es pot derivar a partir del lagrangià

$$L_N = \frac{R^2 \dot{a}^2}{2} + \frac{GM}{aR} = \frac{R^2 \dot{a}^2}{2} + \frac{4\pi G}{3} R^2 a^2 \varrho_0,$$

on $M = \frac{4\pi}{3} a^3 R^3 \varrho_0$ representa la massa dins de la bola.

De fet, utilitzant l'equació d'Euler-Lagrange s'obté

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_N}{\partial \dot{a}} \right) = \frac{\partial L_N}{\partial a} \Rightarrow \ddot{a} = \frac{4\pi G}{3} \frac{\partial}{\partial a} (a^2 \varrho_0) = -\frac{4\pi G}{3} \varrho_0 a,$$

on hem usat la conservació de la massa

$$\frac{\partial}{\partial a} (a^3 \varrho_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a} (a^2 \varrho_0) = -a \varrho_0.$$

Observem que el radi R de la bola triada no afecta les equacions dinàmiques. Per tant, fixem $R = 1$.

Per derivar la segona equació de Friedmann per a un fluid qualsevol, ara hem de tenir en compte l'energia del moviment microscòpic de les partícules que constitueixen el fluid, així com la interacció entre elles; per tant, substituïm la densitat de massa per la densitat d'energia, diem-n'hi ρ_0 , en el lagrangiana newtoniana amb $R = 1$, de la qual cosa resulta

$$\bar{L}_N = \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{4\pi G}{3} a^2 \rho_0.$$

Utilitzant l'equació d'Euler-Lagrange i la primera llei de la termodinàmica,

$$\begin{aligned} d(\rho_0 a^3) &= ad(\rho_0 a^2) + \rho_0 a^2 da \Rightarrow -3p_0 a^2 da = \\ &= ad(\rho_0 a^2) + \rho_0 a^2 da \Rightarrow d(\rho_0 a^2) = -(3p_0 + \rho_0)ada, \end{aligned}$$

derivem fàcilment (2).

El pas següent és obtenir la primera equació de Friedmann. Això es pot aconseguir combinant la segona equació amb la primera llei de la termodinàmica, expressada de la manera següent:

$$\dot{\rho}_0 = -3H(\rho_0 + p_0).$$

Primer, reescrivim (2) com a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(p_0 + \rho_0) + \frac{8\pi G}{3}\rho_0, \quad (3)$$

i calculem

$$\frac{dH^2}{dt} = 2H\frac{\ddot{a}}{a} - 2H^3.$$

Inserint (3) en aquesta última equació, obtenim

$$\frac{d}{dt} \left(H^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \right) = -2H \left(H^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \right) \Rightarrow \frac{d(H^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho_0)}{H^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho_0} = -2 \frac{da}{a}.$$

La solució d'aquesta equació ve donada per

$$H^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho_0 = \frac{C}{a^2},$$

i establint la constant d'integració C igual a $-k$, obtenim la primera equació de Friedmann.

I, finalment, considerant que l'energia d'una bola homogènia de radi a és $E = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_0$, el lagrangiana newtoniana apareix com a $\bar{L}_N = E_{\text{cin}} - V$, on $E_{\text{cin}} = \frac{\dot{a}^2}{2}$ és l'energia cinètica per unitat de massa i $V = -\frac{GE}{a}$ és el potencial gravitatori generat per la bola amb massa en repòs E .

4 Les equacions de Friedmann pertorbades

Aquesta secció està basada en els recents resultats obtinguts a [17], en què tindrem en compte les petites inhomogeneïtats que té l'univers a gran escala, i que considerarem pertorbacions. Comencem amb la mètrica següent, anomenada $\mathbf{g}$, en l'aproximació del camp feble per un potencial newtonià estàtic $|\Phi_N| \ll 1$, que és la pertorbació de la mètrica de FLRW

$$ds^2 = (1 + 2\Phi_N(\mathbf{x})) dt^2 - (1 - 2\Phi_N(\mathbf{x})) d\mathbf{x}^2. \quad (4)$$

Aquesta expressió és una solució no trivial de les equacions pertorbades d'Einstein quan es considera un camp newtonià feble i estàtic. Es pot trobar a la fórmula (106.3) de [21] i també se'n fa referència en el llibre d'Einstein *The Meaning of Relativity* [7]. En la terminologia moderna, s'anomena habitualment *calibració newtoniana*. Aquí, $\mathbf{x}$ representa les coordenades físiques. Tenint en compte l'expansió de l'univers, descrita pel factor d'escala, i la variabilitat del potencial newtonià, la mètrica (4) en coordenades comòbils $\mathbf{q}$, on $\mathbf{x} = a\mathbf{q}$, adopta la forma dinàmica d'una mètrica *conformestàtica* ([31]), és a dir, d'una mètrica amb part espacial conformement plana i estàtica

$$ds^2 = \frac{a^2}{a_N^2(\mathbf{q}, t)} dt^2 - a_N^2(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q}^2, \quad (5)$$

on $a_N(\mathbf{q}, t) \cong a(t)(1 - \Phi_N(\mathbf{q}, t))$ representa el factor d'escala pertorbat, que té un paper vital en la comprensió de la dinàmica de l'univers.

Ara expressem la primera equació de Friedmann en un univers FLRW pla espacialment i utilitzant el temps conforme $dt = a d\eta$, com el lligam següent:

$$\mathcal{H}((a^2)' - \mathcal{H}a^2) = \frac{8\pi G a^4}{3} \rho_0,$$

on usem la derivada respecte al temps conforme i $\mathcal{H} = a'/a$ és el paràmetre de Hubble conforme.

D'altra banda, escrivint $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $p = p_0 + \delta p$, l'equació clàssica de Poisson ve donada per

$$\Delta_{\mathbf{x}}\Phi_N = 4\pi G\delta\rho,$$

que, utilitzant les coordenades comòbils, té la forma

$$-\frac{1}{3}\Delta_{\mathbf{q}}(-2a^2\Phi_N) = \frac{8\pi G a^4}{3}\delta\rho.$$

Per reconciliar ambdues equacions, i considerant la linealitat, s'assumeix que la primera equació de Friedmann pertorbada és

$$\mathcal{H}(\partial_{\eta}(a_N^2) - \mathcal{H}a_N^2) - \frac{1}{3}\Delta_{\mathbf{q}}a_N^2 = \frac{8\pi G a^4}{3}\rho.$$

A continuació, ens ocupem de la segona equació de Friedmann no pertorbada, és a dir, la dinàmica, que es pot escriure com a

$$(a^2)'' - 2\mathcal{H}^2 a^2 = \frac{8\pi G a^4}{3} T_0, \quad (6)$$

on $T_0 = \rho_0 - 3p_0$ és la traça no pertorbada del tensor d'energia-impuls $\mathcal{T} = (\rho + p)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - p\mathbf{g}$, essent $\mathbf{u}$ la forma dual de la velocitat del fluid que omple l'univers, i $\otimes$ el producte de Kronecker.

En l'esperit de les primeres teories escalars de la gravetat [1, 2, 27, 28], la generalització natural de l'equació clàssica de Poisson és

$$\partial_{t^2}^2 \Phi_N - \frac{1}{3} \Delta_{\mathbf{x}} \Phi_N = -\frac{4\pi G}{3} \delta T, \quad (7)$$

on podem veure que, en aquest marc, el potencial newtonià Φ_N és com una ona sonora que viatja amb velocitat $1/\sqrt{3}$, impulsada per la pertorbació de la font δT .

Una vegada tenim aquest, les equacions (6) i (7), l'equació dinàmica més senzilla que les conté és

$$\partial_{\eta^2}^2 a_N^2 - \frac{1}{3} \Delta_{\mathbf{q}} a_N^2 - 2\mathcal{H}^2 a_N^2 = \frac{8\pi G a^4}{3} T.$$

Per tant, en aquest enfocament, les equacions de Friedmann pertorbades són

$$\mathcal{H}(\partial_{\eta}(a_N^2) - \mathcal{H}a_N^2) - \frac{1}{3} \Delta_{\mathbf{q}} a_N^2 = \frac{8\pi G a^4}{3} \rho, \quad (8)$$

$$\partial_{\eta^2}^2 a_N^2 - \frac{1}{3} \Delta_{\mathbf{q}} a_N^2 - 2\mathcal{H}^2 a_N^2 = \frac{8\pi G a^4}{3} T. \quad (9)$$

És important destacar que aquestes equacions corresponen a les equacions linealitzades de la relativitat general. Concretament, les equacions pertorbades de la RG són ([26])

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{q}} \Phi_N - 3\mathcal{H}(\partial_{\eta} \Phi_N + \mathcal{H} \Phi_N) &= 4\pi G a^2 \delta \rho, \\ \partial_{\eta^2}^2 \Phi_N + 3\mathcal{H} \partial_{\eta} \Phi_N + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \Phi_N &= 4\pi G a^2 \delta p, \end{aligned}$$

les quals, després de combinar-se, condueixen, en l'aproximació lineal, a les equacions de Friedmann pertorbades (8) i (9).

Per trobar una forma més familiar de les equacions de Friedmann pertorbades, és important reconèixer que, en aquest enfocament, igual que en l'espai-temps de FLRW, emergeix un sistema de referència privilegiat: el sistema de referència comòbil, que es desplaça amb el fluid que omple l'univers. De fet, com que estem tractant amb un problema d'evolució, procedim com en el formalisme d'Arnótt-Deser-Misner (ADM) [3], en què la varietat de Lorentz té

una foliació privilegiada per a superfícies espacials Σ_t , i adoptem coordenades comòbils. En aquest marc, definim per ∂_t el vector normal de tipus temps, la taxa d'expansió de Hubble escalar en «temps còsmic» $H_N \equiv \frac{\partial_t a_N}{a_N}$ i el vector tridimensional de Hubble $\mathbf{H}_N = \frac{1}{a_N} \nabla_{\mathbf{q}} a_N$. Llavors, utilitzant aquestes definicions, les equacions de Friedmann pertorbades adquireixen la forma habitual de l'espaitemps homogeni

$$H_N^2 - \frac{2}{3a_N^2} \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{H}_N = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (10)$$

$$\frac{\partial_t^2 a_N}{a_N} + \frac{1}{3a_N^2} \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{H}_N = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (11)$$

amb la peculiaritat que ens apareix la divergència del vector de Hubble.

També considerem el vector gradient quadridimensional d'una funció f , definit en geometria diferencial com a $\text{grad}_{\mathbf{g}} f = g^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu$. Llavors, en la mètrica (5), tenim

$$\frac{1}{a_N} \text{grad}_{\mathbf{g}} a_N = H_N \partial_t - \frac{1}{a_N^2} \mathbf{H}_N.$$

De la mateixa manera, la divergència quadridimensional d'un quadrivector és $\text{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} w^\mu)$. Llavors, l'equació dinàmica de Friedmann s'expressa com la relació entre la geometria de la varietat de Lorentz i la matèria que omple l'univers

$$\text{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{H}_{\mathbf{g},N} = 4\pi G(\rho - p), \quad (12)$$

on hem introduït el quadrivector de Hubble $\mathbf{H}_{\mathbf{g},N} \equiv \frac{1}{a_N} \text{grad}_{\mathbf{g}} a_N$.

Les altres equacions dinàmiques provenen de la conservació del tensor d'energia-impuls, és a dir, de $\text{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{T} = 0$, que, en l'aproximació lineal, condueix a

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + (\rho + p)[3H_N + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{v}] &= 0, \\ \partial_t (a_N^2 (\rho + p) \mathbf{v}) + (\rho + p)[3H_N a_N^2 \mathbf{v} - \mathbf{H}_N] + \nabla_{\mathbf{q}} p &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

on $\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{q}}{ds}$ és la velocitat espacial.

En conclusió, les equacions dinàmiques que governen l'evolució de l'univers prenen una forma geomètrica força senzilla

$$\text{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{H}_{\mathbf{g},N} = 4\pi G(\rho - p), \quad \text{div}_{\mathbf{g}} \mathbf{T} = 0.$$

Per acabar la secció, farem quatre observacions rellevants:

1. Podem escriure la primera equació de Friedmann en una forma més geomètrica si es considera la curvatura intrínseca, diem-n'hi $\mathcal{R}$, de la varietat de Lorentz. Com que al primer ordre de pertorbacions tenim $\mathcal{R} = \frac{4}{a_N^2} \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{H}_N$ i $H_N^2 = \mathbf{g}(\mathbf{H}_{\mathbf{g},N}, \mathbf{H}_{\mathbf{g},N})$, podem escriure

$$\mathbf{g}(\mathbf{H}_{\mathbf{g},N}, \mathbf{H}_{\mathbf{g},N}) - \frac{1}{6} \mathcal{R} = \frac{8\pi G}{3} \rho.$$

2. La combinació de les dues equacions de Friedmann (10) i (11) juntament amb l'equació de conservació (13) condueix a la restricció

$$\Delta_{\mathbf{q}} \partial_t a_N = 4\pi G a_N^3 (\rho + p) \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{v}, \quad (14)$$

i, combinant les dues equacions de Friedmann, obtenim

$$\partial_t H_N + \frac{1}{a_N^2} \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{H}_N = -4\pi G (\rho + p), \quad (15)$$

i també

$$2\partial_t H_N + 3H_N^2 = -8\pi G p.$$

3. Multiplicant (15) per H_N , combinant amb l'equació de conservació i la restricció (14), s'obté la primera equació de Friedmann.
4. Definint les *coordenades espacials físiques* com a $\mathbf{x}_N = a_N \mathbf{q}$, prenent la derivada respecte al temps propi s i utilitzant que $\partial_t = \frac{a_N}{a} \partial_t$, s'obté

$$\frac{d\mathbf{x}_N}{ds} = \left(\frac{dt}{ds} \partial_t a_N + \mathbf{v} \cdot \nabla a_N \right) \mathbf{q} + a_N \mathbf{v},$$

i, tenint en compte que $\frac{ds^2}{ds^2} = 1 = \left(\frac{a}{a_N} \right)^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - a_N^2 |\mathbf{v}|^2$, s'arriba a

$$\frac{d\mathbf{x}_N}{ds} = \left(\sqrt{1 + a_N^2 |\mathbf{v}|^2} H_N + \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_N \right) \mathbf{x}_N + a_N \mathbf{v},$$

que, en l'aproximació lineal, condueix a la llei de Hubble-Lemaître pertorbada

$$\frac{d\mathbf{x}_N}{ds} = H_N \mathbf{x}_N + a_N \mathbf{v}.$$

Així, hem aconseguit reobtenir, de manera heurística, les equacions que descriuen l'evolució de les inhomogeneïtats de l'univers, les quals ens permeten comprendre amb més profunditat la formació d'estructures complexes com les galàxies i els cúmuls de galàxies. A més a més, aquestes equacions també ofereixen la possibilitat de confrontar els resultats teòrics amb les observacions actuals, cosa que facilita una validació empírica del model cosmològic. En particular, ens permeten veure com el model actual de la inflació explica adequadament la fase més primitiva de l'univers, i contribuir així a la nostra comprensió del seu origen i de la seva evolució. Aquestes connexions entre teoria i dades observacionals són fonamentals per consolidar les nostres idees sobre l'univers i les seves característiques a gran escala.

5 Les equacions de conservació i d'Euler relativistes

Un cop obtingudes les equacions de Friedmann pertorbades, podem trobar les equacions d'evolució per a la densitat d'energia i la velocitat de les pertorbacions, a partir de l'equació de conservació $\text{div}_g \mathcal{T} = 0$. No obstant això,

volem trobar-les a partir del primer principi de la termodinàmica i de l'equació clàssica d'Euler dels fluids.

Primer de tot, volem obtenir l'equació de conservació de la relativitat general. Per fer-ho, necessitem el resultat següent: Sigui $\varphi_\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el flux d'un fluid perfecte, amb $\varphi_{\bar{\eta}}$ sent la transformació identitat. Definim la velocitat tridimensional en temps conforme $\bar{\mathbf{u}}(\varphi_\eta(\mathbf{q}), \eta) = \frac{d\varphi_\eta(\mathbf{q})}{d\eta}$. Aleshores, arribem al resultat fonamental (trobareu més detalls en el molt recomanable llibre del professor Girbau [12])

$$\left[\frac{d}{d\eta} \int_{\varphi_\eta(V)} f(\mathbf{q}, \eta) dq_1 dq_2 dq_3 \right]_{\eta=\bar{\eta}} = \int_V (\partial_\eta f + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot (f \bar{\mathbf{u}}))_{\eta=\bar{\eta}} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Ara, considerem un volum comòbil infinitesimal δV , on suposarem que, dins d'aquest element de volum, la pressió és la mateixa en tots els punts. Aleshores, aplicant aquest resultat a la primera llei de la termodinàmica, obtenim ([14])

$$\left[\frac{d}{d\eta} \int_{\varphi_\eta(\delta V)} \rho(\mathbf{q}, \eta) dV \right]_{\eta=\bar{\eta}} = -p(\mathbf{q}, \eta) \left[\frac{d}{d\eta} \int_{\varphi_\eta(\delta V)} 1 dV \right]_{\eta=\bar{\eta}},$$

on l'element de volum espacial és $dV = a_N^3 dq_1 dq_2 dq_3$. Aquesta formulació integral és equivalent a l'equació diferencial

$$D_\eta \rho + (\rho + p)[3\mathcal{H}_N + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{u}}] = 0,$$

on hem utilitzat la derivada total $D_\eta \rho = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \rho$ i hem introduït la taxa d'expansió de Hubble $\mathcal{H}_N \equiv \frac{\partial_\eta a_N}{a_N}$ en temps conforme.

Mantenint només els termes lineals, s'obté

$$\partial_\eta \delta \rho + 3\mathcal{H}(\delta \rho + \delta p) + (\rho_0 + p_0)[\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{u}} - 3\partial_\eta \Phi_N] = 0,$$

el qual coincideix, fins al primer ordre, amb les equacions de la relativitat general, i a l'ordre zero s'obté òbviament l'equació de conservació en l'espai temps de FLRW pla, és a dir, $\dot{\rho}_0 = -3H(\rho_0 + p_0)$.

Finalment, necessitem l'equació d'evolució de la velocitat $\bar{\mathbf{u}}$. En primer lloc, recordem que per a un fluid de pols, és a dir, amb $|p| \ll \rho$, prenent l'element de línia $ds^2 = dt^2 - d\mathbf{q}^2$ en l'espai temps de Minkowski, l'equació d'Euler clàssica es pot escriure com a

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} \varrho \bar{\mathbf{v}} dV \right]_{t=\bar{t}} = \int_{\partial V} T(\mathbf{n}) dS - \int_V \varrho \nabla_{\mathbf{q}} \Phi_N dV,$$

on ϱ és la densitat de massa, $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ és el *tensor d'esforç*, $\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$, dS és l'element d'àrea, i $\mathbf{n}$ és la normal exterior a la frontera. Tenint en compte que

per a un fluid perfecte es té que $T(\mathbf{n}) = -p\mathbf{n}$, i, a partir del teorema de la divergència de Gauss, l'equació d'Euler es pot escriure com a

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(V)} \varrho \tilde{\mathbf{v}} dV \right]_{t=\bar{t}} = - \int_V (\nabla_{\mathbf{q}} p + \varrho \nabla_{\mathbf{q}} \Phi_N) dV, \quad (16)$$

la forma diferencial de la qual és

$$\partial_t(\varrho \tilde{\mathbf{v}}) + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot (\varrho \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{v} + \varrho \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{v}} + \nabla_{\mathbf{q}} p + \varrho \nabla_{\mathbf{q}} \Phi_N = 0, \quad (17)$$

o bé

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\varrho} \nabla_{\mathbf{q}} p + \nabla_{\mathbf{q}} \Phi_N = 0,$$

on hem utilitzat la primera llei de la termodinàmica per a un fluid de pols, és a dir, l'equació de continuïtat $\partial_t \varrho + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot (\varrho \tilde{\mathbf{v}}) = 0$.

Cal assenyalar que l'equació (17) és incompatible amb la relativitat especial. Per aquest motiu, la compararem amb la llei de conservació del tensor energia-impuls, $\text{div}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{T} = 0$, en l'espaitemps de FLRW pla.

Hem de tenir en compte que, usant coordenades, l'equació de conservació s'escriu $\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0$, on amb ∇_{μ} es denota la derivada covariant. Apliquem la fórmula (86.11) de [21]

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} T_{\nu}^{\mu}) - \frac{1}{2} \partial_{\nu} (g_{\mu\alpha}) T^{\mu\alpha},$$

a la mètrica de FLRW $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\mathbf{q}^2)$, on

$$u^{\mu} = \left(\frac{d\eta}{ds}, \frac{d\mathbf{q}}{ds} \right) = \frac{1}{a\sqrt{1 - |\tilde{\mathbf{u}}|^2}} (1, \tilde{\mathbf{u}}) \cong \frac{1}{a} (1, \tilde{\mathbf{u}}).$$

Atès que suposem que la velocitat del fluid és molt menor que la velocitat de la llum, aleshores, $\nabla_{\mu} T_k^{\mu} = 0$, que és equivalent a $\partial_{\mu} (a^4 T_k^{\mu}) = 0$, perquè, pel fet d'estar en un espaitemps homogeni, $\partial_k g_{\mu\nu} = 0$ condueix a

$$\partial_{\eta}((\rho + p)\tilde{\mathbf{u}}) + 4\mathcal{H}(\rho + p)\tilde{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot ((\rho + p)\tilde{\mathbf{u}})\tilde{\mathbf{u}} + (\rho + p)\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{q}} p = 0.$$

Per tant, l'equació clàssica d'Euler (16) en un univers en expansió és compatible amb la relativitat especial i l'expansió de l'univers quan substituïm la densitat de massa ϱ per la funció de *calor per unitat de volum* $(\rho + p)$ i $\tilde{\mathbf{v}}$ per $a\tilde{\mathbf{u}}$.

Així, tenint en compte aquesta substitució, quan s'inclou la gravetat, la forma integral de l'equació d'Euler es converteix en ([14])

$$\left[\frac{d}{a_N d\eta} \int_{\varphi_{\eta}(V)} a_N (\rho + p) \tilde{\mathbf{u}} dV \right]_{\eta=\bar{\eta}} = - \int_V \left(\nabla_{\mathbf{q}} p - \frac{\rho + p}{a_N} \nabla_{\mathbf{q}} a_N \right) dV,$$

amb $dV = a_N^3 dq_1 dq_2 dq_3$ (l'element de volum tridimensional) i on hem fet la substitució $\nabla_{\mathbf{q}}\Phi_N \rightarrow -\frac{1}{a_N}\nabla_{\mathbf{q}}a_N$. I, en forma diferencial, l'equació d'Euler relativista esdevé

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_N}\partial_\eta[a_N^4(\rho+p)\bar{\mathbf{u}}] + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{q}}[a_N^3(\rho+p)\bar{\mathbf{u}}] + \\ + a_N^3 \left[(\rho+p)(\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{u}})\bar{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{q}}p - \frac{\rho+p}{a_N}\nabla_{\mathbf{q}}a_N \right] = 0, \end{aligned}$$

que, utilitzant la derivada total i desconsiderant alguns termes de segon ordre, es pot escriure com a

$$D_\eta((\rho+p)\bar{\mathbf{u}}) + (\rho+p) \left[(4\mathcal{H}_N + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{u}})\bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{a_N}\nabla_{\mathbf{q}}a_N \right] + \nabla_{\mathbf{q}}p = 0.$$

Finalment, tinguem en compte que, al primer ordre de pertorbacions, l'equació esdevé

$$\partial_\eta((\rho_0+p_0)\bar{\mathbf{u}}) + 4\mathcal{H}(\rho_0+p_0)\bar{\mathbf{u}} + (\rho_0+p_0)\nabla_{\mathbf{q}}\Phi_N + \nabla_{\mathbf{q}}\delta p = 0,$$

que coincideix amb la linearització de l'equació de conservació del tensor energia-impuls, $\text{div}_{\mathbf{g}}\mathbb{T} = 0$.

6 La mètrica de Schwarzschild a partir de la mecànica newtoniana

Una altra aplicació d'aquesta analogia entre la mecànica newtoniana i la relativitat general és l'obtenció, sense necessitat de resoldre les equacions de camp de la RG, de la famosa mètrica de Schwarzschild, una de les primeres solucions de les equacions d'Einstein, que descriu la mètrica produïda per una partícula puntual de massa M situada a l'origen de coordenades.¹ En la seva forma més coneguda, la mètrica de Schwarzschild és la que van obtenir de manera independent els matemàtics David Hilbert i Johannes Droste [18, 6]:

$$ds^2 = (1 + 2\Phi_N(r)) dt^2 - (1 + 2\Phi_N(r))^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega, \quad (18)$$

on $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, r representa la distància euclidiana, i $\Phi_N(r) = -\frac{MG}{r}$ és el potencial newtonià creat per una partícula puntual de massa M .

Notem que aquesta mètrica és singular a l'anomenat *radi de Schwarzschild* $r = 2MG$, i, a més a més, no és estàtica per a $r < 2MG$ (el vector ∂_r es torna temporal), tot i que el físic Karl Schwarzschild va obtenir una família de solucions que depenien d'un paràmetre, i va triar intencionadament aquest

¹ Recordem la famosa frase atribuïda a John Archibald Wheeler: «La matèria li diu a l'espai temps com s'ha de corbar, i l'espai temps li diu a les partícules de prova com s'han de moure», que, d'alguna manera, podríem dir que és la realització, a segon ordre (un ordre més de la mecànica newtoniana), del pensament d'Ernst Mach sobre la inèrcia.

paràmetre de manera que la mètrica només fos singular a l'origen de coordenades, on estava situada la partícula ([30]). Det fet, la solució que ell va trobar va ser

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{(r^3 + \sigma)^{1/3}}\right) dt^2 - \frac{r^4}{(r^3 + \sigma)^{4/3}} \left(1 - \frac{\alpha}{(r^3 + \sigma)^{1/3}}\right)^{-1} dr^2 + (r^3 + \sigma)^{2/3} d\Omega, \quad (19)$$

amb $\alpha = 2MG$ i on σ era un paràmetre lliure, que, per traslladar la singularitat a l'origen (mireu el coeficient que multiplica a dt^2 en l'equació (19)), Schwarzschild va triar igual a $\sigma = \alpha^3$. Noteu que, si triem $\sigma = 0$, obtenim la solució trobada per Hilbert i Droste.

De fet, Schwarzschild, usant coordenades esfèriques, escriu la mètrica, estacionària amb simetria esfèrica, més general possible com a

$$ds^2 = F(r) dt^2 - H(r) dr^2 - G(r) d\Omega,$$

i, resolent les equacions d'Einstein al buit, troba els valors de F , H i R en la forma que es veu a (19).

La diferència amb els treballs de Hilbert i Droste és que, degut a la covariància de les equacions del camp gravitatori, van triar la nova variable $r^* = \sqrt{G(r)}$, amb la qual cosa la mètrica queda de la forma

$$ds^2 = W(r^*) dt^2 - Z(r^*) dr^{*2} - r^{*2} d\Omega$$

en les noves coordenades. I, com va escriure Hilbert en el seu article [18]: «estem igualment justificats a interpretar r^* , θ i φ com a coordenades esfèriques».

Desafortunadament, Schwarzschild morí l'any 1916, durant la Primera Guerra Mundial, en contraure pèmfing mentre era soldat (va ser en el front de guerra on va obtenir la seva solució), i mai no va conèixer la solució obtinguda per Hilbert i Droste. De totes maneres, veurem que la mecànica newtoniana ens condueix a la versió de Hilbert i Droste. A més a més, en mecànica newtoniana, la velocitat d'escapament ve donada per $v_e = \sqrt{\frac{2MG}{r}}$, la qual cosa implica que la llum, amb velocitat igual a 1 en unitats naturals, no pot escapar de l'interior del radi de Schwarzschild. Això, en relativitat, només es compleix si es tria $\sigma = 0$.

Cal destacar que, basant-se en la versió de Hilbert i Droste, l'any 1939 Oppenheimer i Snyder van publicar el seu treball sobre el col·lapse gravitatori, en el qual van considerar un model simplificat, específicament una estrella sense rotació, sense pressió i amb simetria esfèrica [29]. En aquest treball, els autors van establir la relació entre les coordenades d'un observador estàtic i les d'un observador que es mou conjuntament amb la matèria. El fet crucial d'aquest treball és que, per a un observador extern, el temps que triga la superfície de l'estrella a entrar dins del radi de Schwarzschild és infinit, en contrast amb el temps experimentat per un observador que es mou conjuntament amb la matèria. Aquest fenomen es va entendre inicialment com la formació d'un «estel congelat» (cada vegada alentia més la seva contracció i mai no arriba a entrar dins del radi de Schwarzschild) fins a mitjans dels anys seixanta.

Posteriorment va ser rebatejat com la formació d'un «forat negre», primer per J. A. Wheeler, però des d'una perspectiva diferent: la d'un observador que es mou conjuntament amb la matèria que es contreu. Des d'aquest punt de vista, un forat negre es forma en un temps finit, cosa que ha donat lloc a una àmplia literatura dedicada a explorar-ne l'estructura.

Arribats a aquest punt, un es podria preguntar: què és el que observen els astrònoms, estels congelats o forats negres? De fet, els astrònoms no tenen accés directe a les observacions des del punt de vista d'un observador comòbil. El que realment detecten són fenòmens associats a un camp gravitatori extrem, com ara la radiació emesa per matèria que orbita a prop del radi de Schwarzschild. Així, és temptador dir que el que s'observa són els efectes de la formació d'un forat negre, tal com es percep des d'una perspectiva externa. Un aspecte clau en aquesta discussió és la formació del que es coneix com a *horitzó d'esdeveniments*. Tanmateix, una anàlisi detallada d'aquest fenomen implicaria endinsar-nos en consideracions de diversa índole que ens allunyarien de l'objectiu principal d'aquesta secció.

Fet aquest breu resum històric, vegem com obtenir la mètrica (18) utilitzant només conceptes newtonians i una mica de relativitat especial, i, per tant, sense haver de resoldre les complicades equacions de la RG d'Einstein. Comencem per la força d'inèrcia introduïda per Newton als seus *Principia*, és a dir, aquella resistència que tenen els cossos a romandre en repòs o en moviment rectilini respecte d'un suposat «espai absolut». Aquesta s'expressa com a $F_i = -m_i a_c$, on m_i és la massa inercial del cos i a_c la seva acceleració.

D'altra banda, la força d'atracció de la Terra sobre un cos és $F_g = -gm_g$, on m_g és la massa gravitatòria del cos. Arribats a aquest punt, cal destacar que tots els experiments, des de Galileu fins a l'actualitat, ens indiquen que el valor numèric de la massa inercial i la massa gravitatòria és el mateix. Aquesta igualtat es coneix com a *principi d'equivalència feble*, el qual podem expressar a través de la segona llei de Newton com $a_c = -g$ o, equivalentment, com a

$$F_i + F_g = 0 \quad \text{amb} \quad m_i = m_g, \quad (20)$$

que ens diu que la suma de forces —aquí no comptem amb la fricció— que actuen sobre una partícula en caiguda lliure és zero; la força d'inèrcia compensa la gravetat. Dit «a l'estil d'Einstein», una persona en caiguda lliure, i qualsevol objecte que caigui amb ell, no senten el seu pes. Aquest fet, que ens sembla tan natural, és el que va guiar Einstein en la formulació de la seva teoria relativista de la gravetat, i al qual ell mateix va referir-se com «la idea més feliç de la meua vida».

Seguint aquesta idea, considerem la caiguda lliure, en direcció radial, d'un objecte puntual dins un camp amb simetria radial $\Phi_N(r)$, on r torna a ser la distància euclidiana a l'origen. Llavors, la llei (20) s'escriu com a

$$a_c = -\partial_r \Phi_N,$$

on a_c és l'acceleració de l'objecte en caiguda lliure. Ara bé, com calculem l'acceleració a_c ?

Recordem que la relativitat especial ja ens ensenya que el temps no és absolut. Per tant, en quin sistema de referència hem d'aplicar la segona llei de Newton? Per fer-nos-en una idea, tornem a Einstein: l'objecte no sent el seu pes, és a dir, les forces que actuen sobre ell, la gravetat i la inercial, s'anul·len.

Però quina ha de ser la força d'inèrcia que sent l'objecte i que compensa la gravetat? Semblaria que la més natural ha de ser aquella que es calcula a partir del temps propi de l'objecte $F_i = -m \frac{d^2 r}{ds^2}$, ja que és l'objecte el que la sent, i, per tant, l'acceleració que hem d'agafar en la segona llei de Newton és l'acceleració pròpia, l'obtinguda en el sistema de referència de l'objecte en caiguda lliure. Una vegada feta aquesta hipòtesi, la segona llei de Newton s'escriu com a

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\partial_r \Phi_N. \quad (21)$$

El pas següent és ara trobar la mètrica, les geodèsiques radials de la qual (recordem que l'objecte es mou lliurement, ja que no actua cap força sobre ell) ens donen la llei de Newton (21). Per simetria, la busquem, en coordenades esfèriques, de la forma

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\Omega,$$

i, en fer la variació de l'acció relativista $S = \int ds$ respecte de r , s'obté l'equació de la geodèsica radial

$$-\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{1}{2} \partial_r A = 0 \quad \text{amb la condició} \quad A(r)B(r) = 1,$$

i, imposant que la mètrica sigui la de Minkowski a l'infinit, ja que el potencial gravitatori s'anulla a l'infinit, juntament amb el fet que es compleixi la segona llei de Newton (21), obtenim

$$A(r) = 1 + 2\Phi_N(r) \quad \text{i} \quad B(r) = (1 + 2\Phi_N(r))^{-1}.$$

Veiem, doncs, que, a partir de la mecànica newtoniana i imposant que la força d'inèrcia ve donada per l'acceleració pròpia del cos, es troba la versió de Hilbert i Droste de la mètrica de Schwarzschild, en què les coordenades que s'utilitzen s'han d'interpretar, segons ens acaba de dir la mecànica newtoniana, com a esfèriques, tal com ja va suggerir Hilbert. Observem, doncs, que és la física la que ens proporciona la interpretació adequada de les coordenades. Dit d'una altra manera: les coordenades no tenen un significat independent, desvinculat de la solució de la mètrica. Cada una de les múltiples solucions de la mètrica porta associada la seva pròpia interpretació física de les seves coordenades locals, com ens il·lustra i ens ajuda a comprendre l'exemple de la mètrica de Schwarzschild (vegi's la discussió que es fa a [19]).

6.1 Sobre la precessió del periheli de Mercuri

La llei de la gravitació universal de Newton havia estat una eina extraordinàriament precisa per descriure el moviment dels planetes durant més de dos

segles. No obstant això, a finals del segle XIX, els astrònoms van identificar una discrepància persistent en el moviment del periheli (el punt de màxima proximitat al Sol) de l'òrbita de Mercuri, que no podia ser explicada completament amb la teoria de Newton.

Segons els càlculs basats en la mecànica newtoniana, el periheli de Mercuri havia de precessionar en part a causa de les interaccions gravitacionals amb els altres planetes del sistema solar. Tot i això, les observacions mostraven un excés d'aproximadament 43 segons d'arc per segle que no es podia justificar amb les lleis conegudes.

Durant dècades es van proposar diverses hipòtesis per explicar aquesta discrepància, incloent-hi l'existència d'un nou planeta (anomenat hipotèticament *Vulcà*) o correccions a la llei de Newton. Cap d'aquestes teories, però, no es va demostrar que fos concloent.

Afortunadament, poc després de trobar les seves equacions, i usant perturbacions de segon ordre de les seves equacions, Einstein va trobar que el terme addicional associat a la curvatura de l'espai-temps explicava exactament els 43 segons d'arc per segle observats experimentalment. Això va ser un èxit espectacular, que va convèncer Einstein que la seva teoria era correcta (anys abans del tan famós eclipsi), i va marcar una fita en la història de la ciència. De fet, aquest càlcul basat en aproximacions de segon ordre de les equacions de la RG, i que aportava noves correccions a la mecànica newtoniana, va ser el que va motivar Schwarzschild a buscar una solució exacta de les equacions gravitatòries de la RG, la qual permetia descriure correctament el moviment d'un planeta al voltant del Sol.

Aquí només farem una breu menció de com es pot trobar la precessió del periheli de Mercuri a través de la calibració newtoniana. Comencem amb les anomenades *coordenades harmòniques* ([32])

$$\begin{cases} X_1 = R \sin \theta \cos \varphi, & X_2 = R \sin \theta \sin \varphi, \\ X_3 = R \cos \theta, & t = t, \end{cases}$$

on $R = r - MG$. En aquestes coordenades, la mètrica de Schwarzschild esdevé

$$ds^2 = \left(\frac{1 - MG/R}{1 + MG/R} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{MG}{R} \right)^2 d\mathbf{X}^2 - \left(\frac{1 + MG/R}{1 - MG/R} \right) \frac{M^2 G^2}{R^4} (\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X})^2,$$

la qual, en l'aproximació $MG \ll R$, i retenint només termes lineals en MG/R , s'escriu com a

$$\begin{aligned} ds^2 &\cong \left(1 - \frac{2MG}{R} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2MG}{R} \right) d\mathbf{X}^2 \\ \Rightarrow ds^2 &\cong \left(1 - \frac{2MG}{r} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2MG}{r} \right) dr^2 - r^2 d\Omega, \end{aligned}$$

que és la calibració newtoniana per a una partícula puntual, i que també dona la mateixa precessió del periheli de Mercuri que la mètrica de Schwarzschild, ja

que ambdues mètriques, en l'aproximació $MG/r \ll 1$, donen lloc a la mateixa equació clau ([32, 24])

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = \frac{1 + 2MG(u + u_+ + u_-)}{(u - u_+)(u_- - u)}, \quad (22)$$

on hem introduït la notació $u = 1/r$, $u_+ = 1/r_+$ i $u_- = 1/r_-$, essent r_- la distància del periheli i r_+ la de l'afeli. La integració de l'equació (22) permet calcular la precessió del periheli de Mercuri. (Podeu trobar tots els càlculs detallats en el llibre de Weinberg [32].)

El mateix ocorre si fem servir les anomenades *coordenades isotròpiques*, en les quals la mètrica de Schwarzschild s'expressa de la manera següent:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{MG}{2\tilde{r}}}{1 + \frac{MG}{2\tilde{r}}}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{MG}{2\tilde{r}}\right)^4 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega),$$

amb $r = \tilde{r}(1 + \frac{MG}{2\tilde{r}})^2$, i, per tant, per $MG/r \ll 1$, tornem a obtenir la relació $\tilde{r} = r - MG$, ara entre coordenades esfèriques i isotròpiques.

Per concloure, convé destacar una observació rellevant: Si considerem la primera equació de Friedmann (10) al buit i busquem solucions estacionàries amb simetria esfèrica, obtindrem

$$\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{H}_N = 0 \Rightarrow \partial_q \left(\frac{q^2}{a_N} \partial_q a_N \right) = 0,$$

on $q = |\mathbf{q}|$ és el mòdul de $\mathbf{q}$. La solució d'aquesta equació, que, alineant-se amb la mètrica de Minkowski, a l'infinit val 1, és: $a_N = e^{C/q}$. Per a valors grans de q , tindrem $a_N \cong 1 + \frac{C}{q}$, i, per tant, si volem obtenir la mètrica creada per una partícula puntual de massa M , hem de triar $C = MG$.

Finalment, per trobar la relació amb les coordenades esfèriques que apareixen en la mètrica de Hilbert i Droste, és a dir, entre q i la distància euclidiana r , si comparem la part angular —la que multiplica a $d\Omega$ — per $q \geq MG$, s'obté:

$$r = qe^{MG/q} \Rightarrow q \cong r - MG$$

per $MG/q \ll 1$. Així doncs, per a valors grans de r , la relació és la mateixa que hi ha entre les coordenades esfèriques i harmòniques o isotròpiques, i, per tant, amb la mètrica que s'obté a partir de la primera equació de Friedmann, també es troba la precessió del periheli de Mercuri.

Efectivament, considerem un moviment en el pla $\theta = \pi/2$, llavors la mètrica de Hilbert-Droste s'escriu com a

$$ds^2 = a_N^{-2}(r) dt^2 - a_N^2(r) dr^2 - r^2 d\varphi^2,$$

on $a_N^2(r) = \frac{1}{1+2\Phi_N(r)}$. D'altra banda, l'acció relativista es pot escriure com a $S = \int ds = \int \frac{ds^2}{ds^2} ds$, i, per tant, el lagrangà és

$$\mathcal{L} = a_N^{-2}(r) \dot{t}^2 - a_N^2(r) \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2, \quad \text{amb} \quad \mathcal{L} = 1.$$

Com que el lagrangiana no depèn ni de t ni de φ , tenim dues quantitats que es conserven

$$a_N^{-2}(r)\dot{t} = \sqrt{2\bar{E} + 1} \quad \text{i} \quad r^2\dot{\varphi} = \bar{L},$$

amb la qual cosa la condició $\mathcal{L} = 1$ ens porta a

$$\dot{r}^2 = 2\bar{E} - 2\Phi_N(r) - (1 + 2\Phi_N(r))\frac{\bar{L}^2}{r^2}. \quad (23)$$

Si ara considerem la mètrica conformestàtica

$$ds^2 = a_N^{-2}(q) dt^2 - a_N^2(q) d\mathbf{q}^2, \quad \text{amb} \quad a_N^2(q) = e^{2MG/q} \cong 1 - 2\Phi_N(q),$$

obtindrem

$$\dot{q}^2 = 2E + 1 - a_N^{-2}(q) - a_N^4\frac{L^2}{q^2},$$

i, usant la relació $r^2 = a_N^2 q^2$, s'arriba, en l'aproximació $MG/q \ll 1$, a (23).

7 Algunes reflexions sobre el significat físic de les singularitats matemàtiques que emergeixen en cosmologia

El big-bang, tot i ser una singularitat matemàtica de les equacions d'Einstein (només cal resoldre les equacions homogènies de Friedmann amb una equació d'estat lineal: $p_0 = w\rho_0$ on $w > -1$), sovint s'ha representat de manera inexacta com una explosió literal al començament de l'univers. Per exemple, en el reconegut programa televisiu *Cosmos*, emès als anys vuitanta i presentat per l'astrònom Carl Sagan, l'inici de l'univers es presentava sovint com una colossal explosió. Tanmateix, aquesta representació manca de fonament científic quan s'examina des de la perspectiva de la relativitat general. Recordem que el mateix Albert Einstein va remarcar que, per a densitats d'energia elevades, les seves equacions perden el seu significat [7]. En les seves paraules:

Els dubtes teòrics es basen en el fet que, en el moment inicial de l'expansió, la mètrica esdevé singular i la densitat d'energia, ρ , es torna infinita. En aquest sentit, cal tenir en compte el següent: la teoria actual de la relativitat es basa en una divisió de la realitat física en un camp mètric (gravetat), d'una banda, i en un camp electromagnètic i matèria, de l'altra. En realitat, l'espai probablement tindrà un caràcter uniforme, i la teoria actual només serà vàlida com un cas límit. Per a densitats elevades del camp i de la matèria, les equacions de camp, i fins i tot les variables de camp que hi intervenen, no tindran cap significat real. Per tant, no es pot assumir la validesa de les equacions per a densitats molt altes de camp i matèria, ni concloure que el començament de l'expansió implica necessàriament una singularitat en el sentit matemàtic. El que cal entendre és que les equacions no es poden continuar en aquestes regions. Aquesta consideració, però, no altera el fet que el principi del món constitueix realment un inici des del punt de vista del desenvolupament dels estels i sistemes d'estels actuals, moment en què aquests estels i sistemes encara no existien com a entitats individuals.

Per tant, el que aquesta singularitat matemàtica indica és que, per a un temps còsmic molt proper a $t = 0$, on hem traslladat la singularitat a l'instant $t = 0$, les equacions de la relativitat general no són vàlides per descriure clàssicament l'univers. En aquest sentit, s'assumeix generalment que la relativitat general descriu l'univers només per a escales d'energia o temperatura per sota de la de Planck. Aquesta idea l'expressà clarament Alan Guth, l'inventor del paradigma inflacionari, a [13] quan va escriure:

El model estàndard presenta una singularitat que convencionalment es considera en el temps $t = 0$. Quan $t \rightarrow 0$, la temperatura de l'univers tendeix a l'infinit. Això implica que no es pot definir un problema de valors inicials en $t = 0$. No obstant això, quan la temperatura de l'univers és de l'ordre de la massa de Planck ($m_{\text{pl}} \sim 1.22 \times 10^{19}$ GeV) o superior, les equacions del model estàndard són indubtablement inoperants, ja que s'espera que els efectes gravitacionals quàntics esdevinguin essencials.

Per tant, dins dels límits del nostre coneixement, és raonable iniciar l'escenari del big-bang calent a una temperatura que sigui còmodament inferior a la massa de Planck. En aquest moment, es pot prendre la descripció de l'univers com un conjunt de condicions inicials, i les equacions de moviment descriuen llavors l'evolució posterior. Per descomptat, l'equació d'estat de la matèria a aquestes temperatures no es coneix realment, però es poden fer diverses hipòtesis i explorar-ne les conseqüències.

Ampliant aquesta concepció profundament arrelada d'una creació de l'univers —possiblement heretada, almenys a Occident, d'una tradició paulina—, la representació del big-bang com una explosió dramàtica prové més del desig de transmetre una narrativa captivadora que d'una representació precisa dels principis que regeixen la natura. De fet, el terme *big-bang* va ser encunyat inicialment durant una emissió de ràdio de la BBC l'any 1949 com una etiqueta una mica despectiva per l'astrònom Fred Hoyle, que preferia el seu model d'estat estacionari davant de l'univers en evolució proposat pel físic teòric i sacerdot belga Georges Lemaître. Lemaître va suggerir que l'univers es va expandir des d'un *àtom primigeni* [22]. De fet, com Dirac va explicar a [5], la proposta de Lemaître era que l'univers es va originar a partir d'un únic àtom superradioactiu amb una massa extremadament gran, que es va desintegrar de manera molt abrupta, i es va trencar en fragments, i aquests fragments en peces encara més petites. En paraules del mateix Lemaître:

Necessitem una teoria de l'evolució en forma de focs artificials. Els darrers dos mil milions d'anys són una evolució lenta: són cendres i fum d'uns focs artificials brillants i molt ràpids.

És important destacar que, en aquesta frase, l'ús figuratiu del terme *focs artificials* ha generat malentesos persistents, perpetuats fins avui per narratives populars que presenten l'inici de l'univers com una explosió de matèria localitzada en l'espai exterior. Tanmateix, d'una manera més aclaridora, Lemaître va escriure a [23]:

Si el món ha començat amb un sol quàntum, les nocions d'espai i temps no tindrien cap sentit al principi i només començarien a adquirir algun significat quan el quàntum original s'hagués dividit en un nombre suficient de quàntums. Si aquesta proposta és correcta, l'inici del món va succeir una mica abans de l'inici de l'espai i el temps. Un inici del món d'aquest tipus està prou allunyat de l'ordre actual de la natura, i no és en absolut repugnant.

És evident que la comprensió actual del *big-bang* ha evolucionat significativament, especialment amb la introducció del paradigma inflacionari [13]. La majoria dels cosmòlegs accepten avui que una descripció clàssica de l'univers només és factible a les escales de la gran teoria unificada (GTU), moment en què una expansió accelerada és impulsada per un camp escalar conegut com a *inflató*. Després de la inflació, l'univers experimenta un procés de reescal·lament, ja sigui a través de l'energia alliberada per l'inflató o mitjançant la producció gravitacional (aquí entra la mecànica quàntica, no pas en la seva totalitat quantitzant la gravetat, però sí, de manera semiclàssica, introduint un camp quàntic interaccionant amb la gravetat, la qual li cedeix part de la seva energia per produir partícules supermassives que finalment decauran en les del *model estàndard* [15]) de partícules, per tal d'alinear-se amb l'univers calent de Friedmann.

De fet, no tenim cap experiment a escales properes a la de Planck, en què probablement els efectes quàntics tinguin una importància fonamental, o potser a aquestes escales l'acció d'Einstein-Hilbert presenta no-linealitats en l'escalar de Ricci, i, per tant, les equacions d'Einstein presentaran fortes correccions o simplement s'hauran de canviar en aquesta escala. Tot això són especulacions i van més enllà de la física que coneixem, i és clar que podem fer teories a aquesta escala, com per exemple la teoria quàntica de llaços, la de supercordes i tantes més, i obtenir resultats sorprenents, però això va més enllà del que entenem per física, i, de fet, es podria qualificar com una mena de metafísica que fa ús d'un immens aparell matemàtic. Sovint, aquest aparell resulta tan complex que la rica i intricada estructura de les matemàtiques, amb totes les seves múltiples ramificacions, dificulta, especialment en aquestes teories alternatives que aspiren a transcendir els límits de la relativitat general, l'obtenció d'una visió clara i nítida de la realitat física. Aquesta perspectiva està àmpliament desenvolupada al llibre [8].

Així, adoptant una actitud positivista, sempre es pot argumentar que no cal preocupar-se per les singularitats matemàtiques que apareixen en física, car la mateixa física les resoldrà. Un exemple clar el trobem en l'electrodinàmica quàntica, en què els treballs de Feynman, Schwinger i Tomonaga, guardonats amb el Premi Nobel l'any 1965, van demostrar com eliminar els infinits: primer regularitzant la teoria i després renormalitzant-la, la qual cosa permet obtenir resultats finits i d'acord amb les observacions experimentals.

Aquest precedent ens convida a pensar que les singularitats matemàtiques que poden aparèixer en altres àmbits, com ara en la cosmologia, no són més que indicadors de les limitacions de les teories actuals. Per exemple, les singularitats

associades al big-bang o als forats negres reflecteixen el fet que la relativitat general no és aplicable a escales extremes, on els efectes de la gravetat quàntica haurien de tenir un paper predominant. Així doncs, aquestes singularitats no s'han d'interpretar com una fallida fonamental de la física, sinó com un senyal de la necessitat d'una teoria més completa.

En altres paraules, les singularitats matemàtiques no són més que un símptoma de la inaplicabilitat de les teories físiques actuals a certes escales o condicions (vegi's [9], per a una discussió més detallada). Aquestes situacions, com les associades al big-bang o l'interior dels forats negres, plantegen desafiaments per als físics teòrics, ja que els experiments directes en aquestes escales no són accessibles. Tanmateix, la història de la física ens mostra que les limitacions d'una teoria sovint condueixen al naixement de nous paradigmes científics, obrint la porta a una comprensió més profunda i objectiva de la realitat.

8 Conclusions i una reflexió final

En aquest assaig, s'ha presentat una derivació heurística de les equacions de Friedmann relativistes al primer ordre de pertorbacions, partint dels principis fonamentals de la mecànica newtoniana. Aquest enfocament connecta la mecànica clàssica amb la cosmologia relativista, i ofereix una perspectiva intuïtiva sobre aquestes equacions fonamentals.

Un resultat especialment sorprenent d'aquesta formulació és que el factor d'escala, i en conseqüència el paràmetre de Hubble, no són estrictament homogenis. Aquesta inhomogeneïtat suggereix que les desviacions en els valors mesurats de la taxa de Hubble poden sorgir en funció dels objectes còsmics utilitzats com a referència per a aquestes mesures. Diferents tipus d'objectes, com supernoves, galàxies o quàsars, poden sondejar regions de l'univers amb propietats locals diferents, cosa que condueix a discrepàncies en la taxa d'expansió inferida.

Aquest fet pot tenir implicacions significatives en l'anomenada *tensió de Hubble*, el desacord observat entre el valor actual del paràmetre de Hubble mesurat localment i el seu valor inferit del fons de microones còsmic. Les inhomogeneïtats predites per aquest marc podrien proporcionar una explicació parcial per a aquestes variacions, tot motivant una exploració més profunda del paper de les estructures còsmiques locals en la configuració de la nostra comprensió de l'expansió de l'univers.

D'altra banda, aquest enfocament permet alleugerar la bretxa entre la mecànica clàssica i la relativitat general, vinculant els fonaments intuïtius de la física newtoniana amb els profunds coneixements de la cosmologia moderna mitjançant la senzilla relació entre geometria i matèria representada en l'equació (12). Aquesta tasca no només enriqueix la nostra comprensió teòrica de l'evolució dinàmica de l'univers, sinó que també ofereix una perspectiva unificada sobre com les descripcions clàssiques i relativistes convergeixen en l'estudi dels fenòmens cosmològics.

Voldria acabar amb una reflexió que em sembla adient. A primer cop d'ull, el lector podria estar temptat a pensar que en aquest assaig estic priorititzant la mecànica newtoniana sobre la relativitat general. Ans al contrari, la meua guia sempre han estat les equacions linealitzades de la relativitat, i només buscant unes equacions que, en l'aproximació lineal, coincidissin amb les d'Einstein és com s'han pogut trobar les equacions de Friedmann pertorbades. És així com funcionen les ciències naturals: primer es busquen unes equacions que, en una certa aproximació, coincideixin amb les conegudes, i després, si cal, ja es trobarà un principi variacional que les justifiqui. Aquest va ser el punt de vista d'Einstein per trobar les seves equacions per al camp gravitatori. Volia aconseguir unes equacions tensorials, i, per tant, covariants per difeomorfismes passius (canvis de coordenades), que, en primera aproximació, s'alineessin amb les de Newton i Poisson, i va ser només pocs dies —de fet, setmanes— després de presentar-les a l'Acadèmia Prussiana de Ciències, el novembre de 1915, quan Hilbert les va reobtenir a partir d'un principi variacional, ja coneixent-les prèviament.

Agraïments

Aquest treball compta amb el suport de la subvenció espanyola PID2021-123903NB-I00 finançada per MCIN/AEI/10.13039/501100011033 i per «FEDER Una manera de hacer Europa».

Referències

- [1] ABRAHAM, M. «Zur Theorie der Gravitation». *Physik. Zs.*, 13 (1912), 1-5.
- [2] ABRAHAM, M. «Neuere Gravitationstheorien». *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* (1915), 470-520.
- [3] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. «Republication of: The dynamics of general relativity». *Gen. Relativity Gravitation*, 40 (2008), 1997-2027.
- [4] CALLAN, C.; DICKE, R. H.; PEEBLES, P. J. E. «Cosmology and Newtonian Mechanics». *Amer. J. Phys.*, 33 (2) (1965), 105-108.
- [5] DIRAC, P. A. M. «The scientific work of Georges Lemaître». *Comment. Pontificia Acad. Sci.*, 2 (11) (1968), 1-20.
- [6] DROSTE, J. «The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field». *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, 19 (1917), 197-215.
- [7] EINSTEIN, A. *The Meaning of Relativity*. 4a ed. Princeton: Princeton University Press, 1953.
- [8] ELIZALDE, E. *The True Story of Modern Cosmology: Origins, Protagonists and Breakthroughs*. Berlín: Springer, 2021.

- [9] ELIZALDE, E. «Mathematical singularities in the farthest confines of the Universe—and a brief report on its evolutionary history». *Universe*, 9, 33 (2023), 1–24.
- [10] FRIEDMANN, A. «On the curvature of space». *Z. Physik*, 10 (1922), 377–386.
- [11] FRIEDMANN, A. «Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes». *Z. Physik*, 21 (1924), 326–332. [Traduït a: «On the possibility of a world with constant negative curvature of space». *Gen. Relativity Gravitation*, 31 (12) (1999), 2001–2008]
- [12] GIRBAU, J. *Geometria Diferencial i Relativitat*. Bellaterra: Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1993.
- [13] GUTH, A. H. «Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems». *Phys. Rev. D* (3), 23 (2) (1981), 347–356.
- [14] DE HARO, J. «Relations between Newtonian and Relativistic Cosmology». *Universe*, 10, 263 (2024).
- [15] DE HARO, J.; ARESTÉ SALÓ, L.; PAN, S. «Gravitational reheating formulas and bounds in oscillating backgrounds». *Phys. Rev. D*, 110 (12) (2024), 123504.
- [16] DE HARO, J.; ELIZALDE, E. «Topics in cosmology—Clearly explained by means of simple examples». *Universe*, 8 (3), 166 (2022).
- [17] DE HARO, J.; ELIZALDE, E.; PAN, S. «On the perturbed Friedmann equations in Newtonian Gauge». Preprint (2024). [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/2412.15139>]
- [18] HILBERT, D. «Die Grundlagen der Physik. (Zweite Mitteilung)». *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1917 (1917), 53–76.
- [19] JOHNS, O. D. «Validity of the Einstein hole argument». *Stud. Hist. Philos. Sci. B Stud. Hist. Philos. Modern Phys.*, 68 (2019), 62–70.
- [20] KLIMCHITSKAYA, G. L.; MOSTEPANENKO, V. M. «Centenary of Alexander Friedmann’s prediction of the universe expansion and the quantum vacuum». *Physics*, 4 (3) (2022), 981–994.
- [21] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*. 3a edició en anglès revisada. Oxford: Pergamon Press, 1971. (Course of Theoretical Physics; 2)
- [22] LEMAÎTRE, A. «Contributions to a British Association Discussion on the Evolution of the Universe». *Nature*, 128 (1931), 704–706.
- [23] LEMAÎTRE, G. «The beginning of the world from the point of view of quantum theory». *Nature*, 127 (1) (1931), 706. [Reproduït com a Golden Oldie Editorial a: LUMINET, J.-P. «Editorial note to: Georges Lemaître, The beginning of the world from the point of view of quantum theory». *Gen. Relativity Gravitation*, 43 (10) (2011), 2911–2928]

- [24] MAGNAN, C. «Complete calculations of the perihelion precession of Mercury and the deflection of light by the Sun in General Relativity». Preprint (2007). [Disponible en línia a: <https://arxiv.org/abs/0712.3709>]
- [25] MCCREA, W. H.; MILNE, E. A. «Newtonian universes and the curvature of space». *Q. J. Math.*, 5 (1) (1934), 73–80.
- [26] MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. Amb un pròleg d'Andrei Linde. Nova York: Cambridge University Press, 2005.
- [27] NORDSTRÖM, G. «The principle of relativity and gravitation». *Phys. Zeit.*, 13 (1912), 1126–1129.
- [28] NORDSTRÖM, G. «Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips». *Ann. Phys.*, 347 (13) (1913), 533–554.
- [29] OPPENHEIMER, J. R.; SNYDER, H. «On continued gravitational contraction». *Phys. Rev. (2)*, 56 (5) (1939), 455–459.
- [30] SCHWARZSCHILD, K. «On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory». *Gen. Relativity Gravitation*, 35 (5) (2003), 951–959. [Traduït de l'article original alemany «Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie». *Sitzungsber. Königl. Preussisch. Akad. Wiss. Berlin Phys. Math. Kl.* (1916), 189–196 per S. Antoci i A. Loinger]
- [31] SYNGE, J. L. *Relativity: The General Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.; Nova York: Interscience Publishers, Inc., 1960. (Series in Physics)
- [32] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Nova York: John Wiley & Sons, 1972.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
 UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
 C. COLOM, 11, 08222 TERRASSA
jaime.haro@upc.edu